

Wiskunde 3, 2001/2002

Eindtoets, 18 juni 2002

Zet op elk ingeleverd vel duidelijk je eigen naam en die van je werkcollegedocent. **Bladen waarop deze gegevens ontbreken worden niet nagekeken!** Zet ook op het eerste blad je studentnummer.

De nummers tussen haakjes geven het aantal punten voor die opgave.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}.$$

1. Definieer de functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(x, y, z) = xy + x$. Laat het oppervlak S gegeven zijn door $z^2 = 1 + x^2 + y^2$, met $z \geq 0$.

- (a) (1) Schets S .
- (b) (2) Bepaal met de methode van Lagrangemultiplicatoren de extremen van f beperkt tot S . N.B.: Doe dit niet zonder Lagrangemultiplicatoren!
- (c) (3) Bepaal de aard van deze extremen met een tweede-orde test.
- (d) (3) Vind een parametrisering van S van de vorm $\Psi : (s, t) \mapsto (s, t, h(s, t))$, en definieer $F(s, t) = f(s, t, h(s, t))$. Bepaal de extremen van F en hun aard, en laat zien dat het resultaat in overeenstemming is met wat je voor f had gevonden.

2. Gegeven is de integraal

$$I = \int_1^2 \int_{\log y}^{ay} y \, dx \, dy,$$

met $a = \frac{1}{2} \log 2$.

- (a) (1) Schets het integratiegebied.
 - (b) (2) Bereken I (zonder de integratievolgorde te verwisselen).
 - (c) (3) Bereken I door verwisseling van de integratievolgorde.
3. Laat c de doorsnijding zijn van de oppervlakken $S_1 : y - z + 1 = 0$ en $S_2 : z = x^2 + y^2$.
- (a) (3) Vind een parametrisering van c , en van het door c begrensde deel van S_1 .
 - (b) (3) Definieer $F(x, y, z) = (y - z, x + z, y - x)$. Toon aan dat F conservatief is en bepaal $\int_c F \cdot ds$.
 - (c) (4) Laat V het gebied zijn begrensd door S_1 en S_2 . Bereken $\int \int \int_V \nabla \cdot G \, dV$, met $G = (z, z, 2xz + 2yz)$.

4. Gegeven is het oppervlak S geparаметriseerd door

$$\Psi(\theta, \phi) = ((a + b \cos \phi) \cos \theta, (a + b \cos \phi) \sin \theta, b \sin \phi),$$

met $a > b > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$.

- (a) (2) Schets S .
- (b) (3) Bereken de oppervlakte van S .
- (c) (3) Bereken het volume van het gebied ingesloten door S en het xy -vlak.
- (d) (3) Definieer $F(x, y, z) = (y, -x, e^x \sin y + z^3 y \cos y)$. Bereken $\int \int_S \nabla \times F \cdot dS$.